Algorithmische Graphentheorie

4. Übungsblatt

Jasper Gude Pia Röttgers

18. Mai 2026

/ 20

Aufgabe 1 – Knotengrade

a) Einen solchen Graph gibt es. Siehe Abbildung 1. / 3

b) Das Problem kann als Maximalflussproblem modelliert werden. Dafür haben wir eine Quelle s, eine Senke t und Knoten v_i mit $i \in \mathbb{N}_{\leqslant n}$. Die Eingangskapazität eines Knoten v_i entspricht dem Eingangsgrad e_i. Die Ausgangskapazität entspricht dem Ausgangsgrad a_i. Siehe Abbildung 2.

   Wenn es einen vollständigen Fluss gibt, gibt es eine Lösung für das Problem, sonst nicht. / 4

c) Die Modellierung ist korrekt, da der Eingangs- und Ausgangsgrad jedes Knotens v_i von oben beschränkt wird von der Eingangskapazität e_i bzw. Ausgangskapazität a_i.

   Zudem erfüllt die Flusserhaltung den Zweck, dass die Summe der Eingangsgrade gleich der Summe der Ausgangsgrade sind, was in einem Graphen erfüllt sein muss. / 2

Aufgabe 2 – b-Flüsse

a) Damit überhaupt ein gültiger s-t Fluss existieren kann, muss

$$\sum_{v \in V} b(v) = 0$$

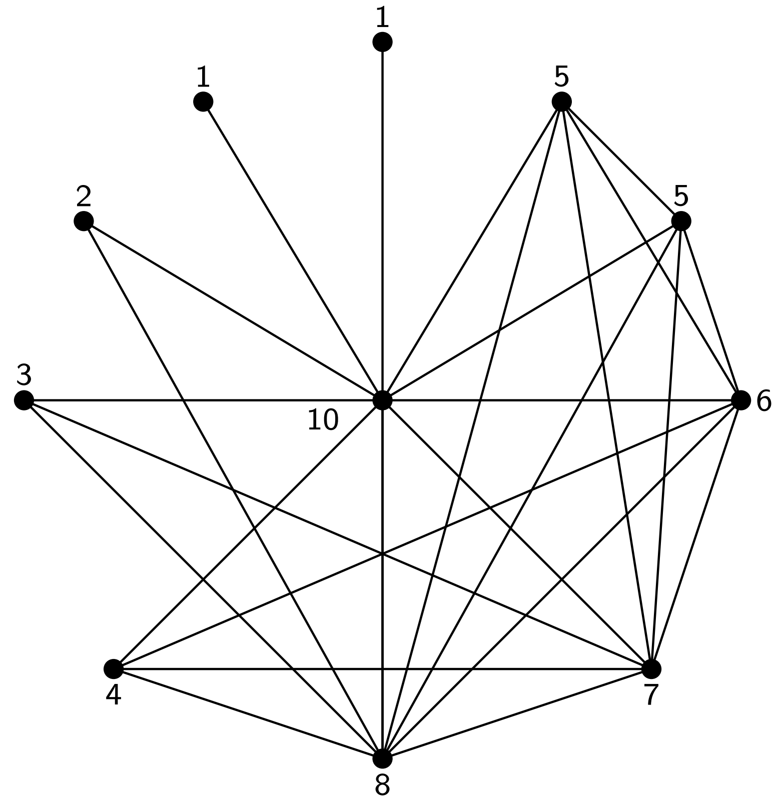

Abbildung 1: Ein Graph mit 11 Knoten und Knotengraden 1, 1, 2, 3, 4, 5, 5, 6, 7, 8, 10.

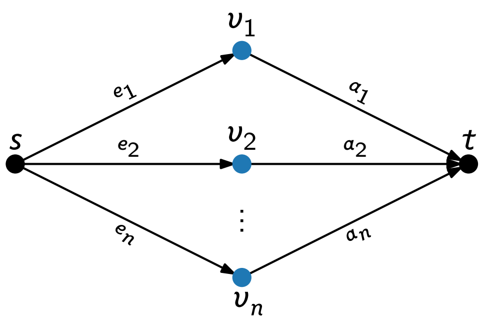

Abbildung 2: Das Problem als Maximalflussproblem.

gelten, da die Flusserhaltung gegeben sein muss.
Man erweitert den Graphen $G = (V, E)$ um eine künstliche Quelle s und eine künstliche Senke t, welche man mit den schon vorhandenen "Quellen" ($b(v) < 0$) und "Senken"($b(v) > 0$) verbindet. Als Kapazität der Kanten wählt man $|b(v)|$.
Die vorher bereits vorhandenen Kanten zwischen den Knoten bleiben natürlich mit ihrer Kapazität vorhanden.
Ein Zulässiger b-Fluss existiert genau dann, wenn der maximale s-t-Fluss im erweiterten Graphen G' genau

$$\sum_{v:b(v)>0} b(v)$$

entspricht, da dann alle neuen von s ausgehenden Kanten vollständig ausgelastet sind.

/ 4

b) 1. Sei f ein zulässiger b-Fluss in G. Man definiert f' auf G' durch:

$$f'(e) = \begin{cases} f(e) & e \in E \\ b(v) & e = (s \to v), b(v) > 0 \\ -b(v) & e = (v \to t), b(v) < 0 \end{cases}$$

Für jeden Knoten $v \in V$ gilt in G':

$$\text{Nettozufluss}_{f'}(v) = \text{Nettozufluss}_f(v) - b(v) = 0$$

Also ist f' ein zulässiger s-t-Fluss mit Wert $|f'| = \sum_{v:b(v)>0} b(v)$

2. Sei f' ein s-t-Fluss in G'. Da sein Wert maximal ist, sind alle Kanten zu s und t voll ausgelastet.
Für die Einschränkung $f := f'|_E$ betrachtet man die Flusserhaltung jedes Knotens $v \in V$ in G':

$$\text{Nettozufluss}_f(v) = \text{Nettozufluss}_{f'}(v) - [\text{Beitrag der neuen Kante}] = 0 - (-b(v)) = b(v)$$

Also ist f ein zulässiger b-Fluss in G.

/ 2

Aufgabe 3 – Minimale Schnitte

Wir wenden den Algorithmus EdmondsKarp für Maximale Flüsse aus der Vorlesung an und führen nach der While-Schleife eine Breitensuche auf dem Residualgraphen G_f mit Startknoten s aus. Die Knoten, die die BFS findet sind die Knoten, die im gesuchten minimalen s-t-Schnitt vorhanden sind.

Das ergibt sich aus dem Min-Cut-Max-Flow-Theorem:

$$\max_{f \text{ zulässiger } s\text{-}t\text{-Fluss}} |f| = \min_{(S,T) \text{ } s\text{-}t\text{-Schnitt}} c(S)$$

Also finden wir einen minimalen Schnitt genau dann, wenn wir einen maximalen Fluss finden.

Die Laufzeit ergibt sich aus der Laufzeit für EdmondsKarp und der Breitensuche, also $\mathcal{O}(VE^2) + \mathcal{O}(V + E) = \mathcal{O}(VE^2)$. $\boxed{\quad / 5}$