

Algorithmische Graphentheorie

8. Übungsblatt

Jasper Gude

Pia Röttgers

16. Juni 2026

10.5 / 20

Aufgabe 1 – Kleinste Schnitte

- a) Siehe Abbildung 1. ✓
- b) Die Wahrscheinlichkeit, dass CONTRACT in keiner Iteration eine Kante aus $C = \{uv \in E \mid u \in S, v \in T\}$ mit minimalem Schnitt (S, T) kontrahiert, also immer die falschen Knoten auswählt, ist laut Vorlesung $\frac{2}{n(n-1)}$. Das heißt die Zahl der richtigen Knoten wächst quadratisch, da die Wahrscheinlichkeit quadratisch abnimmt.

2 / 2

0 / 3

Ich sehe hier keine Erwähnung der Anzahl kleinster Schritte und weiß nicht, was in diesem Kontext "richtige Knoten" sind.

Aufgabe 2 – Implementierung von CONTRACT

1. G nach H kopieren. $\mathcal{O}(1)$
2. Wenn $|V_H| \leq 2$, dann ist die Zerlegung (S, T) von G , die den beiden letzten Knoten in H entspricht, das Ergebnis.

Kopieren in Konstanter Zeit?

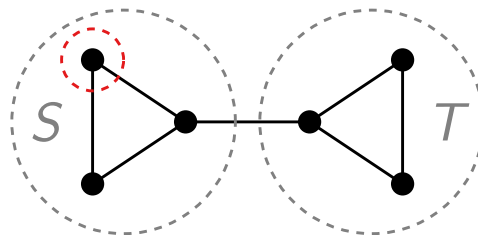


Abbildung 1: Gegenbeispiel; Minimaler Schnitt (S, T) und nicht minimaler Schnitt $(\{v\}, V \setminus \{v\})$ in rot.

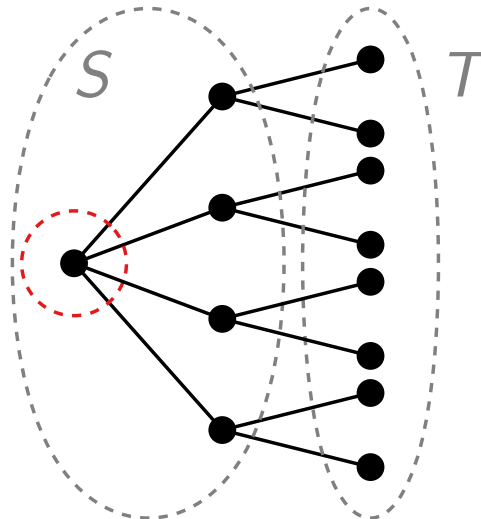


Abbildung 2: Gegenbeispiel; Maximaler Schnitt (S, T) und nicht maximaler Schnitt $(\{v\}, V \setminus \{v\})$

3. Wähle eine Zufallszahl z im Intervall $[1; |V_H|]$. $O(1)$

4. Nimm den Knoten $a = V_H[z]$ und wähle eine Zufallszahl z' im Intervall $[1, |Adj[a]|]$.

Nimm den Knoten $b = Adj_{z'}[a]$. $O(1)$

5. Bestimme für jeden zu a oder b adjazenten Knoten c_i die Anzahl der Kanten zwischen c_i und a oder b . $O(V_H) = O(n)$.

6. Kontrahiere die Kante ab . Lösche dazu die Knoten a, b sowie alle zu a oder b inzidenten Kanten. Da Mehrfachkanten als Zahl implementiert sind, sind nur maximal 2 Einträge pro c_i zu löschen. $O(n)$

Füge einen neuen Knoten d ein. Füge für jeden Knoten c_i die vorher bestimmte Anzahl an Kanten zwischen c_i und a oder b als Kanten zwischen c_i und d ein. $O(n)$

7. Gehe zurück zu Punkt 2

Da der Knoten a durch eine gleichverteilte Zufallszahl z ausgewählt wird und der Knoten b ebenfalls gleichverteilt ausgewählt wird, ist die Kante ab ebenfalls gleichverteilt ausgewählt.

- Das ist nicht ganz offensichtlich.
Es funktioniert hier, aber wäre gut zu erklären warum es funktioniert.
- Gesamtlaufzeit?

Wie funktioniert das in $O(1)$?

Sagen wir alle Knotenpaare u, v haben eine durch 4 teilbare Zahl an Kanten zwischen sich und z' ist 11.

Entweder funktioniert dieser Zugriff nicht in $O(1)$, oder wenn doch stimmt die "2 Einträge"-Aussage in 6. nicht.

Was ist n ?

$O(V) = O(n)$ ist nicht die gleiche Aussage wie $V=n$

4 / 6

Aufgabe 3 – Randomisierte größte Schnitte

a) Siehe Abbildung 2.

Siehe Punktzahl 2.

2 / 2

c)

Es geht hier um die Wahrscheinlichkeit, dass ein bestimmter Schnitt gewählt wird, nicht eine Kantenauswahl.

Weil randMaxCut gleichverteilt aus allen möglichen Schnitten auswählt, also:

$$P(\text{spezifischer Schnitt}) = 1 / [\text{Anzahl möglicher Schnitte}]$$

(hierfür ist zu beachten, dass außerhalb des repeat-until 2 Knotenzuordnungen (nämlich S leer; T leer) nicht mehr zu den möglichen Schnitten zählen.

b) O.B.d.A gilt:

Die Wahrscheinlichkeit dafür dass eine Knoten in S gewählt wird ist $\frac{1}{2}$.

Sei $\{u, v\}$ eine Kante und wurde u in die Menge S gewählt, so ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass v in die selbe Menge gewählt wird $\frac{1}{2}$.

1 / 1

c) Sei (S, T) ein fester maximaler Schnitt. Dann gibt es eine Menge von Kanten $\{e_1, \dots, e_k\}$ die den Schnitt kreuzen, also deren Knoten nicht in die selbe Menge gewählt wurden.

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass diese Kanten nicht in die selbe Menge gewählt wurden ist also

$$1 - \sum_{i=1}^k \frac{1}{2} = 1 - \frac{k}{2}$$

0 / 2

d)

Hierfür auf die Linearität des Erwartungswerts verweisen.

Die erwartete Anzahl an Kanten, die den Schnitt kreuzen ist mindestens $\frac{|E|}{2}$. Im optimalen Fall ist der Graph bipartit und alle Kanten kreuzen den maximalen Schnitt. Somit ist RANDMAXCUT eine $\frac{1}{2}$ -Approximation für den maximalen Schnitt.

1.5 / 4

Die Überlegung ist sinnvoll und beschreibt das "optimale Szenario", aber es fehlen relevante Aussagen - ich muss zu viele Schlüsse selbst ziehen.

Argumentiert etwas ausführlicher die erwartete Anzahl kreuzender Kanten. Für den Rest reicht die Beobachtung:
es können nicht mehr Kanten den Schnitt kreuzen als **alle Kanten**.