

Algorithmische Graphentheorie

12. Übungsblatt

Jasper Gude Pia Röttgers

15. Juli 2026

/ 30

Aufgabe 1 – Listenfärbung

Siehe Abbildung 1.

/ 3

Aufgabe 2 – Graphenmodellierung

Wir modellieren das Funkmastproblem als Graphenproblem. Dabei sind die Funkmasten die Knoten und zwischen zwei Masten existiert eine ungerichtete Kante, wenn sich die Sendegebiere überschneiden.

Die Zuweisung der Frequenzbänder entspricht der Färbung, da überschneidende Sendegebiere unterschiedliche Frequenzbänder nutzen müssen und bei der Färbung adjazente Knoten unterschiedliche Farben haben müssen.

Im Allgemeinen gibt es keine effizienten Algorithmen für die Färbung.

/ 3

Aufgabe 3 – Separierende Kreise und Störgraphen

Separierender Kreis und die Teilstücke wie in Abbildung 2 und der nicht-bipartite Störgraph in Abbildung 3. Der Petersengraph ist also nicht planar.

/ 4

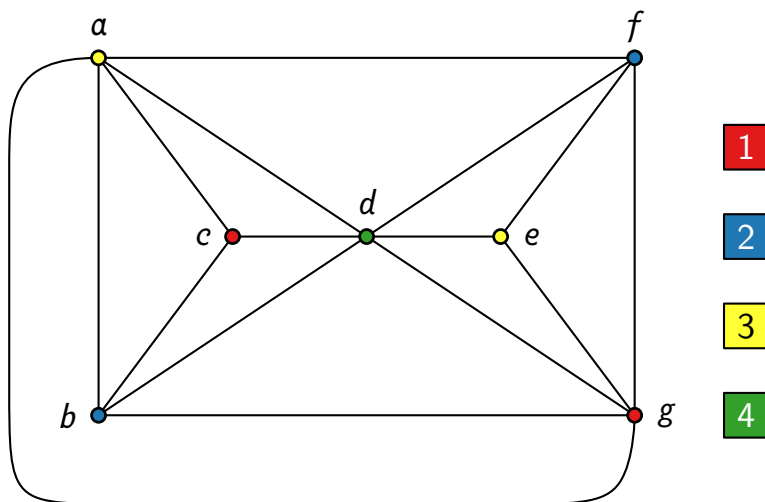
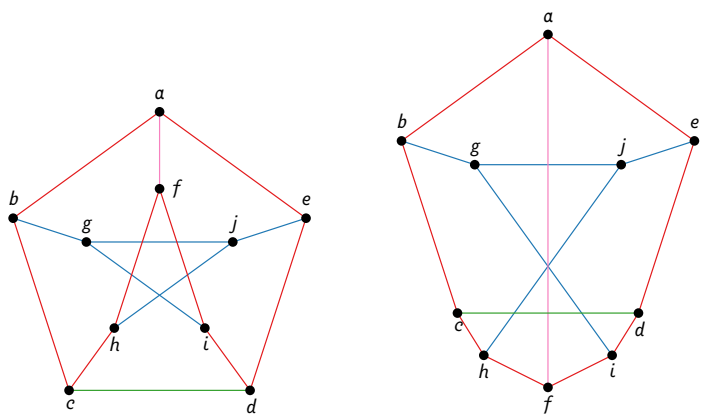


Abbildung 1: Listenfärbung für den Graphen.



(a) Im Petersengraph.

(b) Etwas anders dargestellt.

Abbildung 2: Separierender Kreis in rot und dessen Teilstücke in blau, grün und pink.

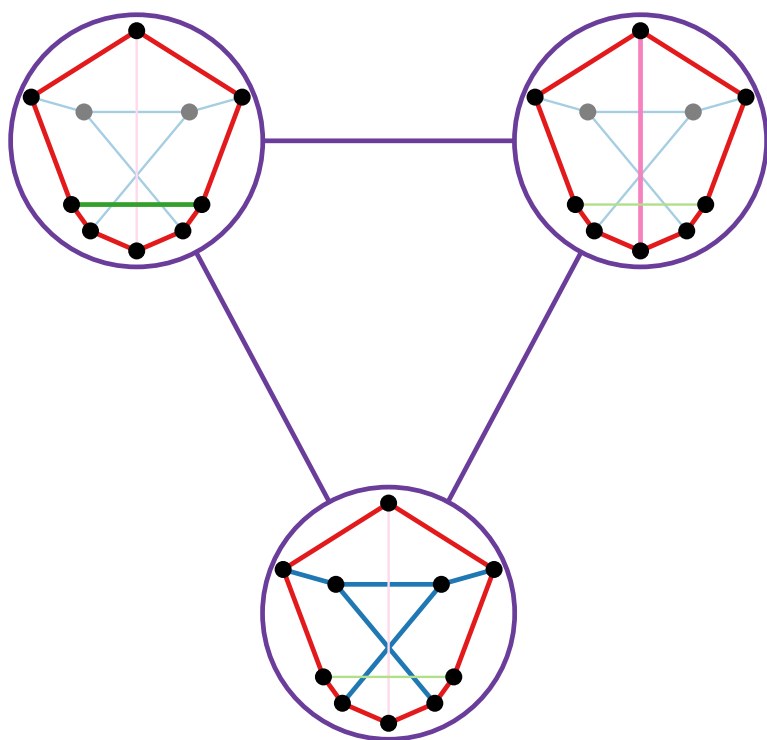


Abbildung 3: Der Störgraph.

Aufgabe 4 – Planarität

- a) (B1) Wäre einer der Teilgraphen $C + P$ von G nicht planar, dann könnte auch der Graph G nicht planar sein.

(B2) Wenn der Störgraph nicht bipartit ist, dann gäbe es keine Möglichkeit die Teilstücke so innen und außen an den separierenden Kreis zu legen, sodass sich keine Teilstücke überschneiden, da es keine Aufteilung der Teilstücke in zwei disjunkte Mengen gibt, bei der sich Teilstücke nicht schneiden.

/ 3

- b) Ein zweifach knotenzusammenhängender Graph hat per Definition einen Kreis.

Aus dem Lemma 1 aus der Vorlesung folgt, dass wenn der Graph einen nicht-separierenden Kreis hat, dann muss ein Teilstück ein Pfad sein, denn wenn es kein Pfad wäre, gäbe es einen separierenden Kreis. Somit besteht der Graph aus einem Kreis und/oder einem Pfadteilstück.

Ein Kreis mit nur einem Teilstück lässt sich immer Überschneidungsfrei zeichnen.

/ 4

- c) Sei P ein Teilstück eines zweifach knotenzusammenhängenden Graphen G bezüglich eines separierenden Kreises C .

Angenommen das Teilstück p hat nur einen Anknüpfungspunkt in C . Dann könnten wir diesen Knoten auf C entfernen und würden den Graphen in zwei Zusammenhangskomponenten zerlegen. Also muss das Teilstück mindestens zwei Anknüpfungspunkte haben und somit ist $C + P$ zweifach knotenzusammenhängend.

/ 3

Aufgabe 5 – Leichteste Kreise

- a) Wir wenden Dijkstra auf den Graphen G mit Startknoten s an (Abbildung 4). Das geht in $\mathcal{O}(n \log n)$ da Dijkstra in $\mathcal{O}(E + V \log V)$ läuft und die Kanten m im planaren Graphen mit $m \leq 3n - 6$ beschränkt sind.

Einen Kreis der s enthält finden wir, wenn wir in einem Teilbaum von s des Kürzeste-Wege-Baums eine Rückwärtskante zu s finden.

Haben wir eine Rückwärtskante in einem Teilbaum gefunden, lesen wir den kürzesten Weg von s zu dem Knoten a von dem die Rückwärtskante ausgeht, aus dem Kürzeste-Wege-Baum ab. Das Gewicht des Kreises erhalten wir, durch $a_d + |as|$, wobei a_d die Länge des kürzesten $s - a$ -Weges ist und $|as|$ das Kantengewicht der Kante as .



Abbildung 4: Let's go Edsger! Shortest Path!

Das müssen wir nun für alle Teilbäume machen.