

# Algorithmische Graphentheorie

## 9. Übungsblatt

Jasper Gude      Pia Röttgers

21. Juni 2026

/ 34

### Aufgabe 1 – Dreifärbbarkeit

- a) Siehe Abbildung 1.
- b) Da die Knoten, die zwei Türme miteinander verbinden, die selbe Farbe haben, kann man zwischen zwei Türme einen weiteren Turm einfügen, der die Färbbarkeitsregeln nicht verletzt.

/ 1

Die Knoten mit Grad 2 im Sterngraphen sind die Spitzen der Türme. Da die Turmverbindungsknoten alle die selbe Farbe haben müssen und die zu ihnen adjazenten Knoten jeweils unterschiedlich gefärbt sein müssen, da sie selbst adjazent zueinander sind, müssen die Spitzen die letzte freie Farbe bekommen.

/ 2

- c) Um das Problem 3COL auf das Problem 3COL4 zu reduzieren, müssen wir dafür sorgen, dass Knoten mit Grad größer 4 so aufgelöst werden, dass sie maximal Grad 4 haben.

Dazu machen wir uns zu nutze, dass der Sterngraph beliebig erweiterbar ist und somit beliebig viele Knoten mit Grad 2 hat, die alle die selbe Farbe haben müssen.

Einen Knoten  $v$  mit Grad  $m > 4$  ersetzen wir durch einen Stern mit  $m$  Zacken. Die zu  $v$  adjazenten Kanten verbinden wir mit den Spitzen des Sterns.

Jetzt haben wir einen Graphen mit Maximalgrad 4 auf dem wir TEST3COL4 anwenden können.

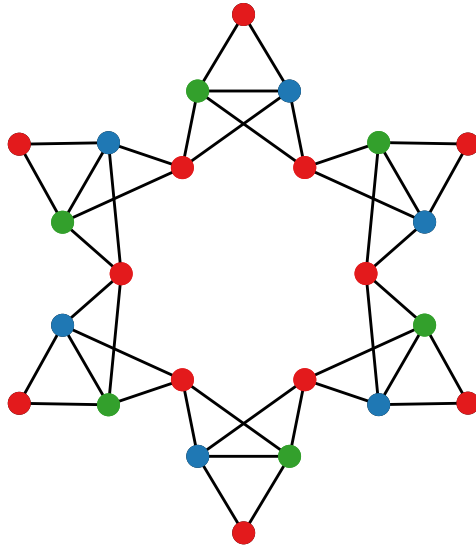


Abbildung 1: Dreifärbung des Sterngraphs.

Beim Rückübersetzen können wir die Sterne wieder durch einen einzigen Knoten ersetzen, der die Farbe der Spitzen hat. Da diese die selbe Farbe haben, verletzt das nicht die Färbbarkeitsregel.

Da 3COL NP-vollständig ist, muss also 3COL4 und insbesondere auch TEST3COL4 auch NP-vollständig sein.

/ 4

## Aufgabe 2 – Chromatische Zahl

- Angenommen der Graph  $G$  ist vollständig. So hat jeder Knoten den maximalen Knotengrad  $\Delta(G)$ . Für alle Knoten  $v$  gilt, dass jeder adjazente Knoten und  $v$  eine eigene Farbe haben muss. Das sind also  $\Delta(G) + 1$  viele. Jeder Graph (mit weniger Kanten) hat also eine chromatische Zahl  $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$ .
- Für alle Anzahlen an Knoten  $n \in \mathbb{N}$  und Maximalgrad  $\Delta < n$  existiert ein Graph  $G_{n,\Delta}$  mit  $\chi(G_{n,\Delta}) = \Delta + 1$ . Dieser Graph hat eine Clique der Größe  $\Delta$ .

/ 2

/ 2

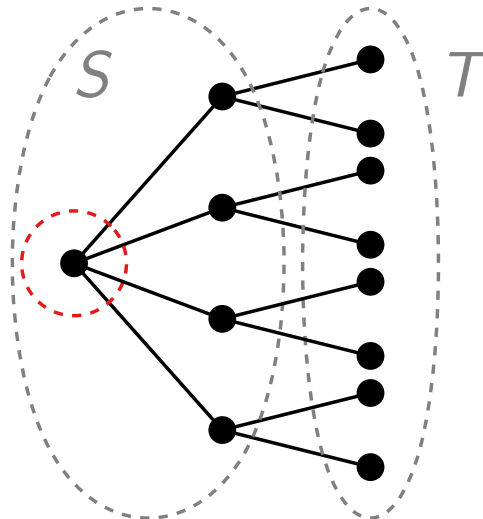


Abbildung 2: Gegenbeispiel; Maximaler Schnitt  $(S, T)$  und nicht maximaler Schnitt  $(\{v\}, V \setminus \{v\})$

c)

Variablen:

$$x_1, \dots, x_n \in \{1, \dots, \Delta + 1\}$$

Jeder Knoten hat eine Farbe

Zielfunktion:

$$\arg \min \sum_{i=1}^n x_i$$

Es werden so wenig Farben wie möglich benutzt

Nebenbedingung:

$$\forall ab: x_a \neq x_b$$

Die Knoten einer Kante haben nicht die selbe Farbe

/ 2

### Aufgabe 3 – Randomisierte größte Schnitte

a) Siehe Abbildung 2.

/ 2

b) O.B.d.A gilt:

Die Wahrscheinlichkeit dafür das eine Knoten in  $S$  gewählt wird ist  $\frac{1}{2}$ .

Sei  $\{u, v\}$  eine Kante und wurde  $u$  in die Menge  $S$  gewählt, so ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass  $v$  in die selbe Menge gewählt wird  $\frac{1}{2}$ .

/ 1

- c) Sei  $(S, T)$  ein fester maximaler Schnitt. Dann gibt es eine Menge von Kanten  $\{e_1, \dots, e_k\}$  die den Schnitt kreuzen, also deren Knoten nicht in die selbe Menge gewählt wurden.

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass diese Kanten nicht in die selbe Menge gewählt wurden ist also

$$1 - \sum_{i=1}^k \frac{1}{2} = 1 - \frac{k}{2}$$

/ 2

d)

...

Die erwartete Anzahl an Kanten, die den Schnitt kreuzen ist mindestens  $\frac{\mathbb{E}}{2}$ . Im schlechtesten Fall ist der Graph bipartit und alle Kanten kreuzen den maximalen Schnitt. Somit ist **RANDMAXCUT** eine  $\frac{1}{2}$ -Approximation für den maximalen Schnitt.

/ 4