

## 2. Übungsblatt

Jasper Gude      Pia Röttgers

5. Mai 2026

/ 21

### Aufgabe 1 – Kleinste Knotenüberdeckung

1. Zielfunktion:

$$\min \sum_{v \in V} x_v$$

2. Entscheidungsvariablen:

$$x_v \in \{0, 1\} \quad \forall v \in V$$

Für jeden Knoten wird eine binäre Variable eingeführt welche 1 ist, falls der Knoten  $x_v$  Teil der Überdeckungsmenge  $C$  ist und andernfalls den Wert 0 annimmt.

3. Nebenbedingung:

$$x_u + x_v \geq 1 \quad \forall \{u, v\} \in E$$

Für jede Kante  $\{u, v\} \in E$  muss mindestens einer der beiden Eckpunkte in  $C$  enthalten sein.

4. **Korrektheit:** Die Nebenbedingung definiert klar, dass für jede Kante mindestens einer der Knoten den Wert 1 haben und somit in der Ergebnismenge  $C$  enthalten sein muss. Dies entspricht genau der Problemstellung.

Da die Summe der Variablen minimiert wird, folgt daraus zwangsläufig die kleinste Knotenüberdeckung.

PuLP Code

/ 3

/ 4

## Aufgabe 2 – Straßenreparatur mittels Linearer Programmierung und Flüssen

Gegeben sei ein ungerichteter Graph  $G = (V, E)$ , der ein Verkehrsnetzwerk darstellt, wobei jeder Knoten  $v \in V$  eine Stadt repräsentiert und jede Kante  $e = \{u, v\}$  eine Straße zwischen den Städten  $u$  und  $v$ .

Die Straßen müssen erneuert werden. Dabei sind für jede Straße  $e \in E$  Reparaturkosten nötig, die durch eine Funktion  $r : E \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  gegeben sind. Zusätzlich hat jede Stadt  $v \in V$  nur ein begrenztes Budget, das durch eine Funktion  $B : V \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  gegeben ist.

- a) Seien  $u_e, v_e \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  die Reparaturbeträge, die Stadt  $u$  und  $v$  für eine inzidente Straße  $e$  zahlen. Um  $u_e, v_e$  zu erhalten gehen wir durch die Adjazenzliste und vermerken pro Kante die inzidenten Knoten. Dann müssen wir folgendes lineares Programm lösen.

Zielfunktion:

$$\arg \max \sum_{e \in E} u_e + v_e$$

Für alle  $e \in E$  gilt

$$r(e) - (u_e + v_e) \leq 0$$

Damit stellen wir sicher, dass die vollen Reparaturkosten bezahlt werden.

Für alle  $u \in V$  und zu  $u$  inzidente Kanten  $I$  gilt

$$\sum_{e \in I} u_e \leq B(u)$$

Damit stellen wir sicher, dass das Budget einer Stadt nicht überschritten wird.

Wenn die Zielfunktion den Wert der Summe aller Reparaturkosten hat, haben wir eine Lösung gefunden.

/ 3
-----

- b) Sei  $x_e \in \{0, 1\}$  der Indikator, ob Stadt  $x$  die Reparaturkosten der inzidenten Straße  $e$  trägt. Dann müssen wir folgendes ganzzahlig lineares Programm lösen.

Zielfunktion:

$$\arg \max \sum_{e \in E} x_e$$

Für alle  $e \in E$  und deren inzidente Knoten  $x, y$  gilt

$$x_e + y_e \leq 1$$

Damit Stellen wir sicher, dass nur eine Stadt die Reparaturkosten einer Straße trägt.

Für alle  $x \in V$  und zu  $x$  inzidente Kanten  $I$  gilt

$$\sum_{e \in I} x_e \cdot r(x) \leq B(x)$$

Damit stellen wir sicher, dass das Budget einer Stadt nicht überschritten wird.

Wenn die Zielfunktion den Wert der Anzahl an Knoten hat, haben wir eine Lösung gefunden.

/ 2

c) Das Problem kann wie in Abbildung 1 als Fluss modelliert werden.

- Dabei ist  $s$  der Startknoten und  $t$  der Zielknoten.
- Die Kantenkapazitäten von  $s$  zu den Städten  $v_i \in V$  ist das Budget  $B(v_i)$ .
- Die Kantenkapazitäten von  $v_i$  zu den Straßen  $e_j \in E$  müssen jeweils größer als  $r(e_j)$  sein. Jede Straße  $e_j$  hat genau zwei eingehende Kanten von den beiden inzidenten Städten.
- Die Kantenkapazitäten von  $e_j$  zu  $t$  sind die Reparaturkosten  $r(e_j)$

Wenn ein zulässiger Fluss alle in  $t$  eingehenden Kanten füllt, dann gibt es eine Lösung für das Problem.

Das Modell ist korrekt, da

- Die Beiträge, die eine Stadt  $v_i$  leisten kann von den eingehenden Kantenkapazitäten limitiert werden.
- Die Straßen  $e_j$  genau zwei eingehende Kanten haben.
- Die Reparaturkosten einer Straße  $e_j$  von den ausgehenden Kantenkapazitäten limitiert werden.

/ 4

### Aufgabe 3 – Flüsse finden

a) Siehe Abbildung 2.

/ 4

b) Es gibt keinen größeren  $s$ - $t$ -Fluss, da die beiden eingehenden Kanten von  $t$  vollständig benutzt werden.

/ 1

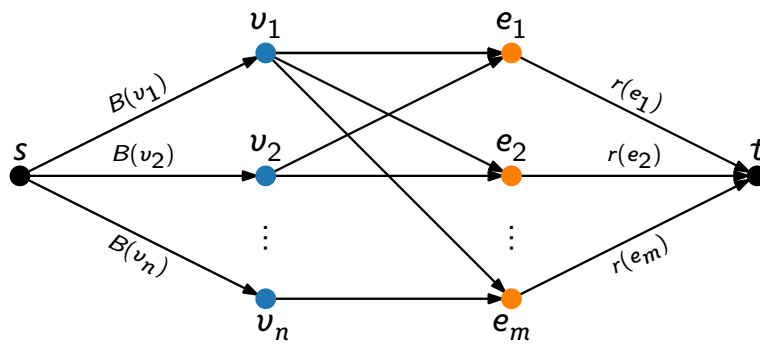


Abbildung 1: Das Problem als Flussproblem. Die blauen Knoten sind Städte und die orangenen Straßen.

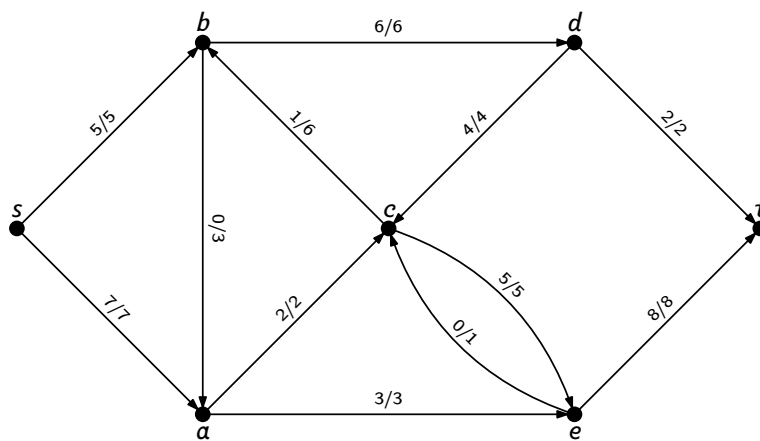


Abbildung 2: Maximaler s-t-Fluss mit Wert 10