

Algorithmische Graphentheorie

6. Übungsblatt

Jasper Gude Pia Röttgers

7. Juni 2026

/ 20

Aufgabe 1 – Wurzelspannbäume und ungerichtete Bäume

Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph und s ein ausgezeichnete Knoten. Zeigen Sie:

Der gerichtete Graph G ist ein s -Wurzelspannbaum \iff Der G zugrunde liegende ungerichtete Graph G' ist ein Baum, für jedes $v \in V \setminus \{s\}$: $\text{indeg}(v) = 1$ und $\text{indeg}(s) = 0$.

\Rightarrow Wenn der Graph G ein s -Wurzelspannbaum ist, dann erfüllt er die Eigenschaften eines s -Wurzelbaums, also G azyklisch, $v \in V \setminus \{s\}$: $\text{indeg}(v) = 1$ und $\text{indeg}(s) = 0$. Der zugrunde liegende ungerichtete Graph G' muss also auch azyklisch, also ein Baum, sein.

\Leftarrow Fall 1: G' ist kein Baum.

Dann existiert in G entweder ein gerichteter Kreis, was die erste s -Wurzelbaum-Eigenschaft verletzt, oder ein Knoten u hat $\text{indeg}(u) > 1$.

Fall 2: Es existiert ein Knoten $v \in V \setminus \{s\}$ mit $\text{indeg}(v) > 1$.

Das verletzt die zweite s -Wurzelbaum-Eigenschaft. Also kann G kein s -Wurzelspannbaum sein.

Fall 3: Der Knoten s hat $\text{indeg}(s) > 0$.

Das verletzt die dritte s -Wurzelbaum-Eigenschaft. Also kann G kein s -Wurzelspannbaum sein.

/ 4



Abbildung 1: Volkswagen für den Raupengott!

Aufgabe 2 – Eigenschaften von Wurzelspannbäumen

Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph und $s \in V$ ein ausgezeichneteter Knoten.

Ein Knoten w ist von einem Knoten v erreichbar, wenn es einen v - w -Weg gibt. Die Erreichbarkeitsmenge $E(v)$ eines Knotens v ist die Menge aller Knoten, die von v erreichbar sind. Insbesondere ist $v \in E(v)$.

- a) Falls $E(s) = V$, dann besitzt G einen s -Wurzelspannbaum.

Das heißt es existiert ein s - u -Weg für jeden Knoten $u \in V$. Daraus folgt, dass für jeden Knoten $v \in V \setminus \{s\}$: $\text{indeg}(v) \geq 1$ gilt, also jeder Knoten erreicht werden kann.

Da es, wenn es einen s - u -Weg gibt, einen einfachen Weg geben muss, gilt für den, durch die s - u -Wege induzierten Graphen, dass er kreisfrei ist, also für jeden Knoten $v \in V \setminus \{s\}$: $\text{indeg}(v) = 1$ und $\text{indeg}(s) = 0$ gilt.

Da jeder Knoten erreicht werden kann und der induzierte Graph die s -Wurzelbaum-Eigenschaften erfüllt, besitzt G einen s -Wurzelspannbaum.

/ 3

- b) Wenn G kreisfrei und einen Wurzelspannbaum besitzt, dann ist dieser eindeutig bestimmt.

Siehe Abbildung 2.

/ 2

- c) Wenn G kreisfrei ist und zwei Wurzelspannbäume besitzt, dann haben beide dieselbe Wurzel.

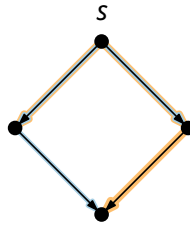


Abbildung 2: Gegenbeispiel mit zwei möglichen Wurzelspannbäumen.

Da nur der Knoten s den Eingangsgrad 0 haben darf, muss dieser Knoten eindeutig sein, da der Graph sonst nicht zusammenhängend wäre und somit keinen s -Wurzelspannbaum besitzen würde.

/ 2

Aufgabe 3 – Matchings in allgemeinen Graphen

a)

```

MATCHINGS( $G = (V, E)$ )
     $M = \emptyset$ 
    visited = Array von False der Größe  $|V|$  // Markiert gematchte Knoten

    for  $e$  in  $E$  do
        if  $\neg \text{visited}[u] \wedge \neg \text{visited}[v]$  then
             $M = M \cup \{e\}$ 
            visited[ $u$ ] = True
            visited[ $v$ ] = True
    return  $M$ 

```

Angenommen M wäre erweiterbar (d.h. es gibt eine Kante $\{u, v\}$ mit $u, v \notin V(M)$). Dann wurden sowohl u als auch v während des Algorithmus beim Durchlaufen der Kante $\{u, v\}$ als frei angesehen und wäre somit der Menge M hinzugefügt worden. Das ist ein Widerspruch.

Laufzeit:

Initialisierung des Arrays: $\mathcal{O}(V)$

Schleife: Jede Kante wird genau einmal betrachtet ($\mathcal{O}(V)$) und die Überprüfung und Markierung passieren in $\mathcal{O}(1)$. Also insgesamt $\mathcal{O}(E)$

Das ergibt eine Gesamtlaufzeit von $\mathcal{O}(V + E)$

/ 3

b)

/ 2

- c) Sei M das vom Algorithmus berechnete maximale Matching und M^* das optimale maximale Matching.

Für jede Kante $e^* = \{u, v\} \in M^*$ gilt: mindestens einer der beiden Knoten u oder v muss über eine Kante aus M abgedeckt werden, sonst wäre der M nicht nicht-erweiterbar.

Eine Kante aus M hat genau zwei Endknoten und kann daher höchstens zwei verschiedene Kanten aus M^* „blockieren“. Da alle Kanten in M^* disjunkt sind kann man daraus folgern:

$$|M^*| \leq 2 \cdot |M| \implies |M| \geq \frac{1}{2} |M^*|$$

Somit ist der Algorithmus aus der Teilaufgabe a) eine 1/2 Approximation für ein optimales Matching.

/ 3

- d) Zielfunktion:

$$\arg \min \sum_{e \in E} x_e \geq 1$$

Entscheidungsvariablen: für jede Kante $e \in E$:

$$x_e \in \{0, 1\} \quad \forall e \in E$$

Die Variable nimmt den Wert 1 an, wenn die Kante im Matching M ist und 0 falls sie das nicht ist.

Nebenbedingungen:

1. Matching: Jeder Knoten darf von maximal einer Matching-Kante berührt werden

$$\forall v \in V: \sum_{e \in \delta(v)} x_e \leq 1$$

$\delta(v)$ ist die Menge aller Kanten welche an v anliegen

2. Nicht-Erweiterbarkeit: Für jede Kante $\{u, v\}$ muss die Summe der Matching-Kanten an u und v mindestens 1 sein

$$\forall \{u, v\} \in E: \sum_{e \in \delta(u)} x_e + \sum_{e' \in \delta(v)} x_{e'} \geq 1$$

$\delta(v)$ ist die Menge aller Kanten welche an v anliegen. Äquivalent für $\delta(u)$.

/ 3

- e)

/ 2