

Algorithmische Graphentheorie

6. Übungsblatt

Jasper Gude

Pia Röttgers

7. Juni 2026

/ 20

Aufgabe 1 – Wurzelspannbäume und ungerichtete Bäume

Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph und s ein ausgezeichnete Knoten. Zeigen Sie:

Der gerichtete Graph G ist ein s -Wurzelspannbaum \iff Der G zugrunde liegende ungerichtete Graph G' ist ein Baum, für jedes $v \in V \setminus \{s\} : \text{indeg}(v) = 1$ und $\text{indeg}(s) = 0$.

\Rightarrow Wenn der Graph G ein s -Wurzelspannbaum ist, dann erfüllt er die Eigenschaften eines s -Wurzelbaums, also G azyklisch, $v \in V \setminus \{s\} : \text{indeg}(v) = 1$ und $\text{indeg}(s) = 0$. Der zugrunde liegende ungerichtete Graph G' muss also auch azyklisch, also ein Baum, sein.

\Leftarrow Fall 1: G' ist kein Baum.

Dann existiert in G entweder ein gerichteter Kreis, was die erste s -Wurzelbaum-Eigenschaft verletzt, oder ein Knoten u hat $\text{indeg}(u) > 1$.

Fall 2: Es existiert ein Knoten $v \in V \setminus \{s\}$ mit $\text{indeg}(v) > 1$.

Das verletzt die zweite s -Wurzelbaum-Eigenschaft. Also kann G kein s -Wurzelspannbaum sein.

Fall 3: Der Knoten s hat $\text{indeg}(s) > 0$.

Das verletzt die dritte s -Wurzelbaum-Eigenschaft. Also kann G kein s -Wurzelspannbaum sein.

/ 4



Abbildung 1: Volkswagen für den Raupengott!

Aufgabe 2 – Eigenschaften von Wurzelspannbäumen

Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph und $s \in V$ ein ausgezeichneteter Knoten.

Ein Knoten w ist von einem Knoten v erreichbar, wenn es einen v - w -Weg (Abbildung 1) gibt. Die Erreichbarkeitsmenge $E(v)$ eines Knotens v ist die Menge aller Knoten, die von v erreichbar sind. Insbesondere ist $v \in E(v)$.

- a) Falls $E(s) = V$, dann besitzt G einen s -Wurzelspannbaum.

Das heißt es existiert ein s - u -Weg für jeden Knoten $u \in V$. Daraus folgt, dass für jeden Knoten $v \in V \setminus \{s\}$: $\text{indeg}(v) \geq 1$ gilt, also jeder Knoten erreicht werden kann.

Da es, wenn es einen s - u -Weg gibt, einen einfachen Weg geben muss, gilt für den, durch die s - u -Wege induzierten Graphen, dass er kreisfrei ist, also für jeden Knoten $v \in V \setminus \{s\}$: $\text{indeg}(v) = 1$ und $\text{indeg}(s) = 0$ gilt.

Da jeder Knoten erreicht werden kann und der induzierte Graph die s -Wurzelbaum-Eigenschaften erfüllt, muss G einen s -Wurzelspannbaum besitzen.

/ 3

- b) Wenn G kreisfrei und einen Wurzelspannbaum besitzt, dann ist dieser eindeutig bestimmt.

Siehe Abbildung 2.

/ 2

- c) Wenn G kreisfrei ist und zwei Wurzelspannbäume besitzt, dann haben beide dieselbe Wurzel.

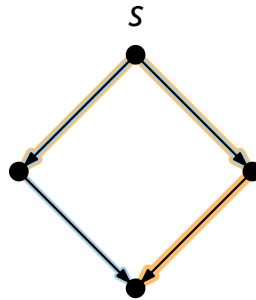


Abbildung 2: Gegenbeispiel mit zwei möglichen Wurzelspannbäumen.

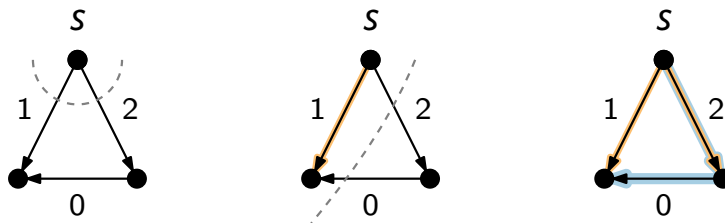


Abbildung 3: Gegenbeispiel: Jarnik-Prim in orange und Optimale Lösung in blau.

Da nur der Knoten s den Eingangsgrad 0 haben darf, muss dieser Knoten eindeutig sein, da der Graph sonst nicht zusammenhängend wäre und somit keinen s -Wurzelspannbaum besitzen würde.

/ 2

Aufgabe 3 – Wurzelspannbäume in azyklischen Graphen

a) Siehe Abbildung 3.

/ 2

b) Siehe Abbildung 4.

/ 2

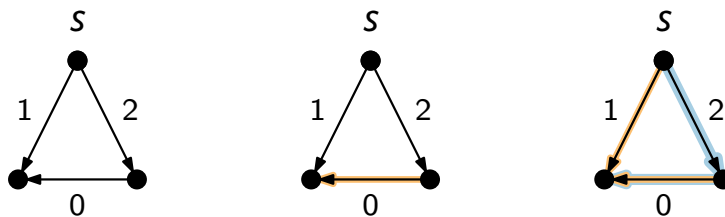


Abbildung 4: Gegenbeispiel: Kruskal in orange und Optimale Lösung in blau.

- c) DAGMST nimmt für jeden Knoten $v \in V \setminus \{s\}$ die Kante (u, v) mit minimalen Kosten in den s -Wurzelspannbaum.

Dadurch, dass genau eine Kante (u, v) für jeden Knoten v ausgewählt wird, hat jeder Knoten $\text{indeg}(v) = 1$ und $\text{indeg}(s) = 0$.

Insbesondere ist auch jede Kante eine ausgehende Kante eines anderen Knotens, und weil genau $n - 1$ Kanten ausgewählt werden, muss der Graph T zusammenhängend sein.

Da G azyklisch ist, muss auch T azyklisch sein. Also berechnet DAGMST einen s -Wurzelspannbaum.

/ 3

- d) Sei T ein Wurzelspannbaum der von DAGMST berechnet wurde.

Angenommen es gibt einen Wurzelspannbaum T' der kleiner als T ist, dann muss es einen Knoten v geben mit Eingangskantenkosten

$$c((u', v)) < c((u, v))$$

Das ist ein Widerspruch, da DAGMST immer die minimale Kante (u, v) nimmt.

/ 2