

# Algorithmische Graphentheorie

## 8. Übungsblatt

Jasper Gude

Pia Röttgers

17. Juni 2026

/ 20

### Aufgabe 1 – Kleinste Schnitte

a) Siehe Abbildung 1.

/ 2

b) Die Wahrscheinlichkeit, dass CONTRACT in keiner Iteration eine Kante aus  $C = \{uv \in E \mid u \in S, v \in T\}$  mit minimalem Schnitt  $(S, T)$  kontrahiert, also immer die falschen Knoten auswählt, ist laut Vorlesung  $\frac{2}{n(n-1)}$ . Das heißt die Zahl der richtigen Knoten wächst quadratisch, da die Wahrscheinlichkeit quadratisch abnimmt.

/ 3

### Aufgabe 2 – Implementierung von CONTRACT

1.  $G$  nach  $H$  kopieren.  $\mathcal{O}(1)$
2. Wenn  $|V_H| \leq 2$ , dann ist die Zerlegung  $(S, T)$  von  $G$ , die den beiden letzten Knoten in  $H$  entspricht, das Ergebnis.

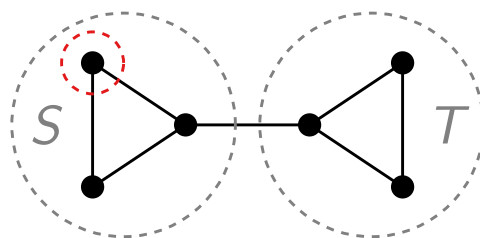


Abbildung 1: Gegenbeispiel; Minimaler Schnitt  $(S, T)$  und nicht minimaler Schnitt  $(\{v\}, V \setminus \{v\})$  in rot.

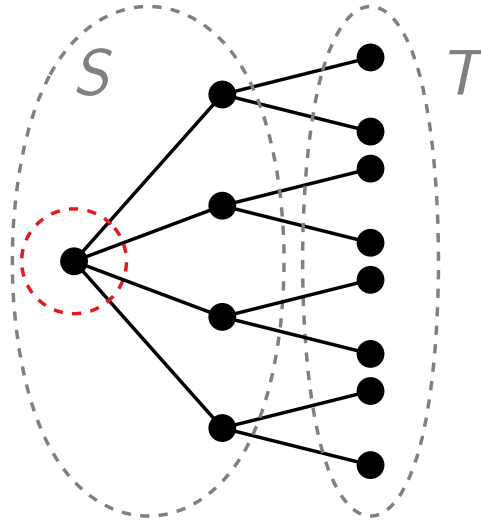


Abbildung 2: Gegenbeispiel; Maximaler Schnitt (S, T) und nicht maximaler Schnitt  $(\{v\}, V \setminus \{v\})$

3. Wähle eine Zufallszahl  $z$  im Intervall  $[1; |V_H|]$ .  $\mathcal{O}(1)$
4. Nimm den Knoten  $a = V_H[z]$  und wähle eine Zufallszahl  $z'$  im Intervall  $[1, |\text{Adj}[a]|]$ .  
Nimm den Knoten  $b = \text{Adj}_{z'}[a]$ .  $\mathcal{O}(1)$
5. Bestimme für jeden zu  $a$  oder  $b$  adjazenten Knoten  $c_i$  die Anzahl der Kanten zwischen  $c_i$  und  $a$  oder  $b$ .  $\mathcal{O}(V_H) = \mathcal{O}(n)$ .
6. Kontrahiere die Kante  $ab$ . Lösche dazu die Knoten  $a, b$  sowie alle zu  $a$  oder  $b$  inzidenten Kanten. Da Mehrfachkanten als Zahl implementiert sind, sind nur maximal 2 Einträge pro  $c_i$  zu löschen.  $\mathcal{O}(n)$   
Füge einen neuen Knoten  $d$  ein. Füge für jeden Knoten  $c_i$  die vorher bestimmte Anzahl an Kanten zwischen  $c_i$  und  $a$  oder  $b$  als Kanten zwischen  $c_i$  und  $d$  ein.  $\mathcal{O}(n)$
7. Gehe zurück zu Punkt 2

Da der Knoten  $a$  durch eine gleichverteilte Zufallszahl  $z$  ausgewählt wird und der Knoten  $b$  ebenfalls gleichverteilt ausgewählt wird, ist die Kante  $ab$  ebenfalls gleichverteilt ausgewählt.

/ 6

### Aufgabe 3 – Randomisierte größte Schnitte

- a) Siehe Abbildung 2.

/ 2

b) O.B.d.A gilt:

Die Wahrscheinlichkeit dafür das eine Knoten in  $S$  gewählt wird ist  $\frac{1}{2}$ .

Sei  $\{u, v\}$  eine Kante und wurde  $u$  in die Menge  $S$  gewählt, so ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass  $v$  in die selbe Menge gewählt wird  $\frac{1}{2}$ .

/ 1

c) Sei  $(S, T)$  ein fester maximaler Schnitt. Dann gibt es eine Menge von Kanten  $\{e_1, \dots, e_k\}$  die den Schnitt kreuzen, also deren Knoten nicht in die selbe Menge gewählt wurden.

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass diese Kanten nicht in die selbe Menge gewählt wurden ist also

$$1 - \sum_{i=1}^k \frac{1}{2} = 1 - \frac{k}{2}$$

/ 2

d)

...

Die erwartete Anzahl an Kanten, die den Schnitt kreuzen ist mindestens  $\frac{|E|}{2}$ . Im schlechtesten Fall ist der Graph bipartit und alle Kanten kreuzen den maximalen Schnitt. Somit ist  $\text{RANDMAXCUT}$  eine  $\frac{1}{2}$ -Approximation für den maximalen Schnitt.

/ 4