

### 3. Übungsblatt

Jasper Gude      Pia Röttgers

11. Mai 2026

/ 25

#### Aufgabe 1 – Triangulierungen und Dynamische Programmierung

a)

$$T(P) = \begin{cases} 0 & \text{falls } P \text{ nur 2 Ecken hat} \\ \min_{i \in \{2, \dots, n-1\}} [T(p_{1,i}) + T(p_{i,n})] & \\ + \text{Diagonalkosten}(i) & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\text{Diagonalkosten}(i) = \begin{cases} d(p_2, p_n) & \text{falls } i = 2 \\ d(p_1, p_{n-1}) & \text{falls } i = n - 1 \\ d(p_1, p_i) + d(p_i, p_n) & \text{sonst} \end{cases}$$

Die Kosten der minimalen Triangulierung  $T(P)$  lassen sich aus der minimalsten Summe der kostenminimalsten Triangulierung der entstehenden Teilpolygone  $T(p_{1,i})$  und  $T(p_{i,n})$  und den entstehenden Diagonalkosten berechnen.

Die Diagonalkosten unterscheiden sich, je nachdem ob eine oder zwei der drei Kanten Polygonkanten sind. Sobald ein (Teil-)Polygon nur noch zwei Ecken hat bricht die Rekursion ab.

/ 2

b) Man nutzt die Idee aus a.

**Tabelle**  $A[i, j]$  speichert die kostenminimalen Triangulierung des Teilpolygons mit den Ecken  $p_i, \dots, p_j$ .

Für alle  $i$  gilt  $A[i, i + 1] = 0$ , da diese Teilpolygone mit nur zwei Ecken darstellen, welche keine Triangulierung benötigen.

Für  $j > i + 1$  gilt:

$$A[i, j] = \min_{k \in \{i+1, \dots, j-1\}} [A[i, k] + A[k, j] + \text{Diagonalkosten}(i, k, j)]$$

$$\text{Diagonalkosten}(i, k, j) = \begin{cases} d(p_k, p_j) & \text{falls } k = i + 1 \\ d(p_i, p_k) & \text{falls } k = j - 1 \\ d(p_i, p_k) + d(p_k, p_j) & \text{sonst} \end{cases}$$

Man berechnet dabei die Einträge nach nach wachsendem Abstand  $r = j - i$ , also von  $r = 2$  bis  $r = n - 1$ . Dadurch sind die Einträge  $A[i, k]$  und  $A[k, j]$  immer bereits berechnet wenn man den  $A[i, j]$  benötigt, da  $k - i < r$  und  $j - k < r$  gilt.

Das Ergebnis steht dann in  $A[1, n]$ .

/ 4

- c) Die polynomielle Laufzeit kann über die Schleifen des DP begründet werden.

Äußere Schleife:  $r$  läuft von 1 bis  $n - 1$  benötigt also  $\mathcal{O}(n)$  Schritte.

Mittlere Schleife: für jedes  $r$  gibt es  $\mathcal{O}(n)$  Paare  $(i, j)$  bei welchen  $j - i = r$  gilt.

Innere Schleife: Für jedes Paar probiert man alle  $k$  zwischen  $i$  und  $j$  also  $\mathcal{O}(n)$  Werte.

Pro Iteration der inneren Schleife benötigt man  $\mathcal{O}(1)$  um die Einträge zu berechnen.

Daraus folgt:

$$T(n) = \mathcal{O}(n) \cdot \mathcal{O}(n) \cdot \mathcal{O}(n) \cdot \mathcal{O}(1) = \mathcal{O}(n^3)$$

Diese Schranke ist auch scharf, da jeder der  $\mathcal{O}(n^2)$  Tabelleneinträgen auch tatsächlich befüllt wird und für jeden der Einträge im Durchschnitt  $\mathcal{O}(n)$  Werte von  $k$  durchprobiert werden. Es gilt also  $\Theta(n^3)$ .

Der Speicherbedarf des Programms ist  $\mathcal{O}(n^2)$ , da die Tabelle so viele Einträge für die Paare  $(i, j)$  mit  $1 \leq i < j \leq n$  hat.

/ 2

## Aufgabe 2 – TSP mit Wiederholungen

- a) Um TSP mit Wiederholungen auf Metrisches TSP zu reduzieren, müssen wir den zugrundeliegenden Graphen metrisch machen, d. h. die Dreiecksungleichung muss für jede Menge von 3 Knoten gelten.

Dazu iterieren wir über alle möglichen Mengen  $T = \{a, b, c\}$  mit  $a \neq b \neq c$  und  $a, b, c \in V$  und  $G(T, E)$  ist vollständig. Erfüllt eine Menge die Dreiecksungleichung  $c(a, b) \leq c(b, c) + c(a, c)$  nicht, so löschen wir

die Kante mit den höchsten Kosten aus dem Graphen. Das dürfen wir, da die TSP-Tour diese Kante nie enthalten wird, weil es einen Weg gibt, der kürzer ist und alle drei Knoten enthält. Der Graph bleibt zusammenhängend, da wir für jede Menge  $T$  nur eine Kante löschen.

/ 3

- b) Da wir den Graphen jetzt auf einen metrischen reduziert haben, können wir ähnlich wie in der Vorlesung vorgehen.

Dazu nehmen wir einen Minimalen Spannbaum des Metrischen Graphen. Durch verdoppeln der Kanten entsteht ein Kreis für dessen Kosten gilt (siehe Vorlesung):

$$c(\text{Kreis}) = 2 \cdot c(\text{MSB}) \leq 2 \cdot \text{OPT}$$

Da eine TSP-Tour mit einer Kante weniger ein Spannbaum ist.

Da wir Knoten und Kanten mehrfach benutzen dürfen, ist dieser Kreis eine 2-Approximation für TSP mit Wiederholungen.

/ 3

### Aufgabe 3 – Metrisches TSP

- a) Der Algorithmus für Minimale Spannbäume von Prim fügt in jedem Schritt die den Schnitt kreuzende Kante zum Baum hinzu, deren Kosten unter allen anderen kreuzenden Kanten minimal ist.

COMPLETEHAMILTON fügt denselben Knoten hinzu, da der Knoten  $v$  nicht in  $C$  liegt, also den Schnitt kreuzt und den kleinsten Abstand zu den Knoten in  $C$  hat.

/ 2

- b) In jedem Schritt von COMPLETEHAMILTON wird eine Kante  $wu$  in  $C$  durch zwei Kanten  $wv$  und  $vu$  ersetzt. Da  $wv$  die minimale kreuzende Kante ist und  $G$  die Dreiecksungleichung erfüllt, ist  $c(v, u) \leq c(u, w) + c(w, v)$  und ist somit nicht länger als der doppelte Minimale Spannbaum, der analog zu COMPLETEHAMILTON berechnet wird. Damit gilt wieder:

$$c(\text{Kreis}) = 2 \cdot c(\text{MSB}) \leq 2 \cdot \text{OPT}$$

Da eine TSP-Tour mit einer Kante weniger ein Spannbaum ist.

/ 4

### Aufgabe 4 – Längste Wege

- a) Da  $s, t$  in  $G'$  adjazent zu jedem Knoten in  $G$  ist, können wir einen einfachen  $s$ - $t$ -Weg der Länge  $k+2$  erzeugen, indem wir einen einfachen Weg der Länge  $k$  in  $G$  nehmen,  $s$  an das eine Ende und  $t$  an das andere Ende hängen.

Umgekehrt kann man aus einem einfachen  $s$ - $t$ -Weg der Länge  $k$  in  $G'$  einen einfachen Weg der Länge  $k-2$  in  $G$  konstruieren, indem wir  $s$  und  $t$  entfernen.

/ 2

- b) Ein Hamiltonweg ist ein Weg der alle Knoten in  $G$  beinhaltet und somit Länge  $n - 1$  besitzt.

Wie wir oben gezeigt haben, kann ein  $s$ - $t$ -Weg der Länge  $n + 1$  in  $G'$  leicht in einen Weg der Länge  $n - 1$  in  $G$  umgewandelt werden. Das heißt, dass wir einen Hamiltonweg in  $G$  finden, wenn wir einen  $s$ - $t$ -Weg finden.

Umgekehrt können wir einen Hamiltonweg leicht in einen  $s$ - $t$ -Weg umwandeln, also finden wir einen  $s$ - $t$ -Weg wenn wir einen Hamiltonweg finden.

Also finden wir einen Hamiltonweg genau dann, wenn wir einen  $s$ - $t$ -Weg finden.

/ 1

- c) Da wir Hamiltonweg auf LÄNGSTER  $s$ - $t$ -WEG reduziert haben, muss also LÄNGSTER  $s$ - $t$ -WEG NP-schwer sein, denn wenn es in  $P$  liegen würde, könnten wir auch Hamiltonweg in polynomieller Zeit lösen. Da wir nicht von  $P = NP$  ausgehen, ist das nicht möglich.

/ 2