

10. Übungsblatt zur Vorlesung Algorithmische Graphentheorie (Sommer 2026)

Aufgabe 1 – Größte Clique

Beim Problem GRÖSSTE CLIQUE ist ein Graph $G = (V, E)$ gegeben und gesucht wird eine Teilmenge $V' \subseteq V$, sodass V' in G eine Clique ist und es keine größere Clique gibt.

- a) Beschreiben Sie einen Brute-Force-Ansatz, der dieses Problem löst, und schätzen Sie seine Laufzeit in Abhängigkeit von n scharf ab, wobei $n = |V|$. **2 Punkte**
- b) Der Maximalgrad von G sei nun Δ (es gilt also $\Delta = \max_{v \in V} \deg(v)$). Beschreiben Sie einen Algorithmus, der bei Eingabe von G sowie einem Knoten $v \in V$ die größte Clique findet, an der v beteiligt ist. Dieser Algorithmus muss nicht effizient sein, jedoch schneller als der Brute-Force-Ansatz, wenn $\Delta \in o(n)$. Schätzen Sie die Laufzeit Ihres Algorithmus scharf in Abhängigkeit von n und Δ ab. **2 Punkte**
- c) Zeigen Sie: GRÖSSTE CLIQUE ist festparameterberechenbar bezüglich des Maximalgrades Δ . **2 Punkte**

Aufgabe 2 – Geradenüberdeckung

Beim Problem GERADENÜBERDECKUNG ist eine Menge von Punkten in der Ebene gegeben und gesucht wird eine Menge von Geraden, die die Punkte *überdeckt*, d. h. jeder Punkt ist in mindestens einer Geraden enthalten. Im Folgenden entwickeln wir einen Algorithmus, der entscheidet, ob es für eine gegebene Punktmenge P und eine natürliche Zahl k eine Geradenüberdeckung mit Mächtigkeit $\leq k$ gibt. Dabei sei $n := |P|$.

- a) Erläutern Sie, dass es (für $n \geq 2$) genügt, Geraden zu betrachten, auf denen mindestens zwei Punkte liegen. **1 Punkt**
- b) Geben Sie eine scharfe obere Schranke für die Anzahl an Geraden an, auf denen mindestens zwei Punkte liegen. **1 Punkt**
- c) Beschreiben Sie, wie mit Geraden umzugehen ist, die mehr als k Punkte enthalten. Begründen Sie Ihre Antwort. **1 Punkt**
- d) Angenommen es gibt keine Gerade, die mehr als k Punkte enthält. Für welche Werte des Parameters k können wir sicher sagen, dass es keine Geradenüberdeckung geben kann? **1 Punkt**

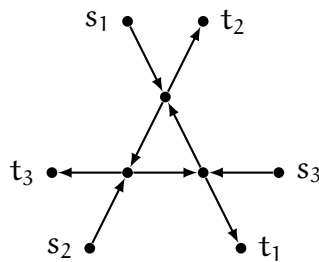
- e) Geben Sie einen FPT-Algorithmus für GERADENÜBERDECKUNG bezüglich des Parameters k (also der Größe der Geradenüberdeckung) in Worten an. Schätzen Sie seine Laufzeit sinnvoll ab. **5 Punkte**

Hinweis: Nutzen Sie die Beobachtungen aus den Teilaufgaben a)–d).

Aufgabe 3 – Mehrgüterfluss

Wir betrachten die Verallgemeinerung von Flüssen auf so genannte *Mehrgüterflüsse*, bei denen es mehrere Quellen und Senken geben kann. Gegeben ist auch hier ein gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit Kantenkapazitäten $c: E \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$. Statt einer Quelle s und einer Senke t gibt es jetzt aber eine Menge $V_s = \{s_1, \dots, s_k\} \subseteq V$ von Quellen und eine Menge $V_t = \{t_1, \dots, t_k\} \subseteq V$ von Senken.

Das k -Tupel $f = (f_1, \dots, f_k)$ mit $f_i: E \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, $1 \leq i \leq k$, ist ein *zulässiger Mehrgüterfluss*, wenn jedes f_i ein zulässiger s_i - t_i -Fluss ist und $\sum_i f_i(e) \leq c(e)$ für alle Kanten $e \in E$. Der Flusswert eines s_i - t_i -Flusses sei mit $F(f_i)$ bezeichnet. Der Gesamtflusswert ist definiert als $F(f) := \sum_i F(f_i)$.



- a) Betrachten Sie den abgebildeten Graphen. Es sei $c(e) = 1$ für alle $e \in E$. Geben Sie den maximalen Gesamtflusswert an (mit Begründung) unter der Bedingung, dass jede Kante einen ganzzahligen Flusswert besitzt. **2 Punkte**
- b) Betrachten Sie den abgebildeten Graphen. Es sei $c(e) = 1$ für alle $e \in E$. Geben Sie den maximalen Gesamtflusswert an (mit Begründung), wenn es keine weiteren Bedingungen gibt. **3 Punkte**

Bitte geben Sie Ihre Lösungen bis **Dienstag, 30. Juni 2026, 13:00 Uhr** einmal pro Gruppe über WueCampus als PDF-Datei ab. Geben Sie stets die Namen aller an, die das Übungsblatt bearbeitet haben (max. 2).

Begründen Sie Ihre Behauptungen und kommentieren Sie Ihren Pseudocode!

Plagiate werden mit 0 Punkten für das ganze Übungsblatt gewertet.