

## 7. Übungsblatt zur Vorlesung Algorithmische Graphentheorie (Sommer 2026)

### Aufgabe 1 – Wurzelspannbäume und ungerichtete Bäume

Sei  $G = (V, E)$  ein gerichteter Graph und  $s$  ein ausgezeichnete Knoten. Zeigen Sie:

Der gerichtete Graph  $G$  ist genau dann ein  $s$ -Wurzelspannbaum, wenn der  $G$  zugrunde liegende ungerichtete Graph ein Baum ist, für jedes  $v \in V \setminus \{s\}$ :  $\text{indeg}(v) = 1$  gilt und  $\text{indeg}(s) = 0$ . **4 Punkte**

*Hinweis:* Verwenden Sie die genaue Definition eines  $s$ -Wurzelspannbaums aus der Vorlesung und denken Sie daran beide Richtungen zu zeigen.

### Aufgabe 2 – Eigenschaften von Wurzelspannbäumen

Sei  $G = (V, E)$  ein gerichteter Graph und  $s \in V$  ein ausgezeichnete Knoten.

Ein Knoten  $w$  ist von einem Knoten  $v$  *erreichbar*, wenn es einen  $v$ - $w$ -Weg gibt. Die *Erreichbarkeitsmenge*  $E(v)$  eines Knotens  $v$  ist die Menge aller Knoten, die von  $v$  erreichbar sind. Insbesondere ist  $v \in E(v)$ .

Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen.

- a) Falls  $E(s) = V$ , dann besitzt  $G$  einen  $s$ -Wurzelspannbaum. **3 Punkte**
- b) Wenn  $G$  kreisfrei ist (d. h. ohne gerichtete Kreise) und einen Wurzelspannbaum besitzt, dann ist dieser eindeutig bestimmt. **2 Punkte**
- c) Wenn  $G$  kreisfrei ist (d. h. ohne gerichtete Kreise) und zwei Wurzelspannbäume besitzt, dann haben beide dieselbe Wurzel. **2 Punkte**

### Aufgabe 3 – Wurzelspannbäume in azyklischen Graphen

Sei  $G = (V, E)$  ein gerichteter *azyklischer* Graph, d. h. ein Graph ohne gerichtete Kreise, und  $s \in V$  ein Knoten, von dem aus alle anderen Knoten erreichbar sind. Sei  $c: E \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  eine Funktion, die jeder Kante ein nichtnegatives Gewicht zuordnet.

- a) Zeigen Sie: Der Algorithmus von Jarník-Prim mit Startknoten  $s$  berechnet im Allgemeinen keinen minimalen  $s$ -Wurzelspannbaum von  $G$ , selbst wenn er die Kantenrichtungen beachtet und immer nur ausgehende Kanten erkundet. **2 Punkte**
- b) Um den Algorithmus von Kruskal auf  $G$  anwenden zu können, ignorieren wir die Kantenrichtungen. Zeigen Sie: Der Algorithmus von Kruskal berechnet im Allgemeinen keinen minimalen  $s$ -Wurzelspannbaum von  $G$ . **2 Punkte**

Betrachten Sie nun den folgenden Algorithmus (wie oben beschrieben ist von  $s$  aus jeder Knoten in  $G$  erreichbar). Dabei gibt  $\arg \min_{x \in X} f(x)$  ein  $x \in X$  aus, für das der Funktionswert  $f(x)$  unter allen Elementen aus  $X$  minimal ist.

DAG\_MST(gerichteter azyklischer Graph  $G = (V, E)$ , Knoten  $s$ , Kantenkostenfkt.  $c$ )

```
E' = ∅  
foreach v ∈ V \ {s} do  
    e(v) = arg min(u,v) ∈ E c((u, v))  
    E' = E' ∪ {e(v)}  
return T = (V, E')
```

- c) Zeigen Sie: DAG\_MST berechnet einen  $s$ -Wurzelspannbaum von  $G$ . **3 Punkte**
- d) Zeigen Sie: Der von DAG\_MST berechnete Wurzelspannbaum ist *minimal*. **2 Punkte**

---

Bitte geben Sie Ihre Lösungen bis **Dienstag, 9. Juni 2026, 13:00 Uhr** einmal pro Gruppe über WueCampus als PDF-Datei ab. Geben Sie stets die Namen aller an, die das Übungsblatt bearbeitet haben (max. 2).

Begründen Sie Ihre Behauptungen und kommentieren Sie Ihren Pseudocode!

Plagiate werden mit 0 Punkten für das ganze Übungsblatt gewertet.