

4. Übungsblatt

Jasper Gude Pia Röttgers

18. Mai 2026

/ 20

Aufgabe 1 – Knotengrade

- a) Einen solchen Graph gibt es. Siehe Abbildung 1.
- b) Das Problem kann als Maximalflussproblem modelliert werden. Dafür haben wir eine Quelle s , eine Senke t und Knoten $v_{i_e/a}$ mit $i \in \mathbb{N}_{\leq n}$.

/ 3

Die Eingangskapazität eines Knoten v_{i_a} entspricht dem Ausgangsgrad a_i .

Die Ausgangskapazität eines Knoten v_{i_e} entspricht dem Eingangsgrad e_i .

Für die Kantenkapazität $c \in \mathbb{N}$ einer Kante (v_{i_a}, v_{j_e}) mit $i, j \leq n$ gilt, wenn $i = j$, sind Selbstkanten erlaubt, wenn $c > 0$. Ausserdem sind Mehrfachkanten erlaubt, wenn $c > 1$. Siehe Abbildung 2.

Wenn es einen vollständigen Fluss gibt, also alle in t eingehenden Kanten vollständig benutzt werden, gibt es eine Lösung für das Problem, sonst nicht.

/ 4

- c) Die Modellierung ist korrekt, da die Eingangs- und Ausgangsgrade der Knoten v_i im Graphen durch die Kantenkapazitäten a_i und e_i Fluss beschränkt werden.

Durch wählen der Kantenkapazitäten der Kanten (v_{i_a}, v_{j_e}) im Fluss können Selbst- und Mehrfachkanten ein- oder ausgeschlossen werden. Damit entsprechen diese Kanten im Fluss den Kanten im Graphen.

/ 2

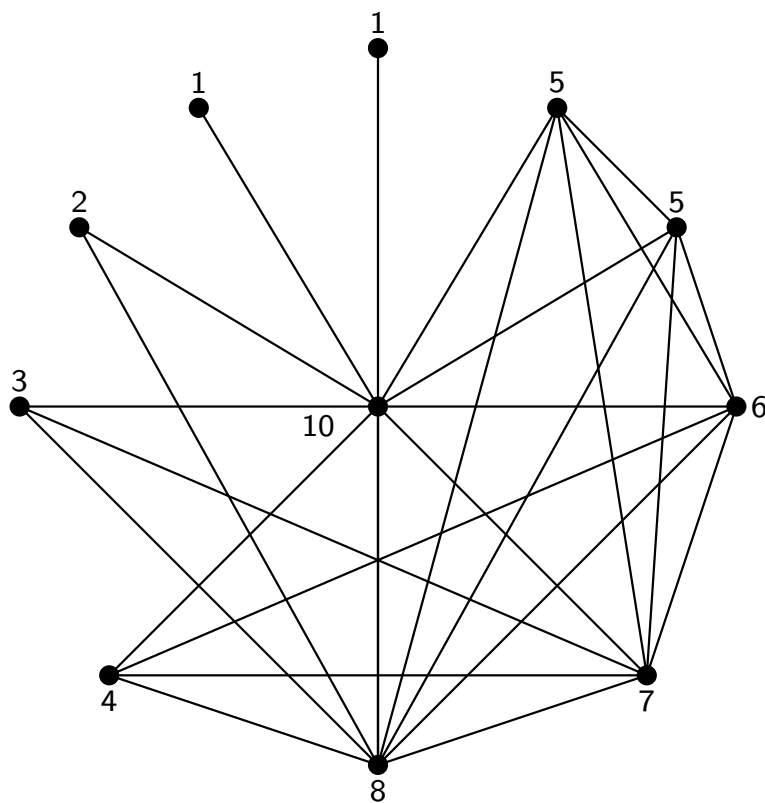
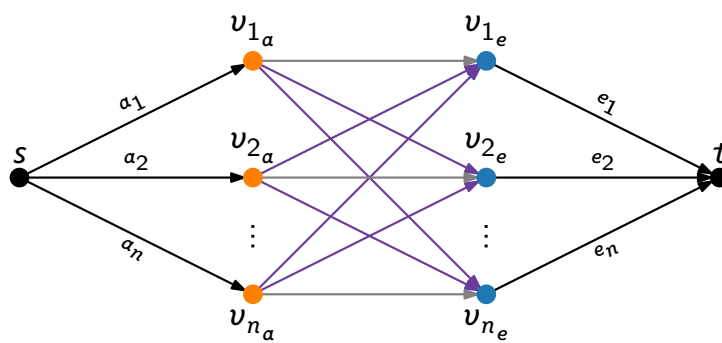


Abbildung 1: Ein Graph mit 11 Knoten und Knotengraden 1, 1, 2, 3, 4, 5, 5, 6, 7, 8, 10.



Lila Kanten Kantenkapazität 1 wenn keine Mehrfachkanten erlaubt sind.

Graue Kanten Kantenkapazität 0 wenn keine Selbstkanten erlaubt sind.

Abbildung 2: Das Problem als Maximalflussproblem.

Aufgabe 2 – b-Flüsse

- a) Damit überhaupt ein gültiger s-t Fluss existieren kann, muss

$$\sum_{v \in V} b(v) = 0$$

gelten, da die Flusserhaltung gegeben sein muss.

Man erweitert den Graphen $G = (V, E)$ um eine künstliche Quelle s und eine künstliche Senke t , welche man mit den schon vorhandenen "Quellen" ($b(v) < 0$) und "Senken" ($b(v) > 0$) verbindet. Als Kapazität der Kanten wählt man $|b(v)|$.

Die vorher bereits vorhandenen Kanten zwischen den Knoten bleiben natürlich mit ihrer Kapazität vorhanden.

Ein Zulässiger b-Fluss existiert genau dann, wenn der maximale s-t-Fluss im erweiterten Graphen G' genau

$$\sum_{v: b(v) > 0} b(v)$$

entspricht, da dann alle neuen von s ausgehenden Kanten vollständig ausgelastet sind.

/ 4

- b) 1. Sei f ein zulässiger b-Fluss in G . Man definiert f' auf G' durch:

$$f'(e) = \begin{cases} f(e) & e \in E \\ b(v) & e = (s \rightarrow v), b(v) > 0 \\ -b(v) & e = (v \rightarrow t), b(v) < 0 \end{cases}$$

Für jeden Knoten $v \in V$ gilt in G' :

$$\text{Nettozufluss}_{f'}(v) = \text{Nettozufluss}_f(v) - b(v) = 0$$

Also ist f' ein zulässiger s-t-Fluss mit Wert $|f'| = \sum_{v: b(v) > 0} b(v)$

2. Sei f' ein s-t-Fluss in G' . Da sein Wert maximal ist, sind alle Kanten zu s und t voll ausgelastet.

Für die Einschränkung $f := f'|_E$ betrachtet man die Flusserhaltung jedes Knotens $v \in V$ in G' :

$$\begin{aligned} \text{Nettozufluss}_f(v) &= \text{Nettozufluss}_{f'}(v) - [\text{Beitrag der neuen Kante}] \\ &= 0 - (-b(v)) \\ &= b(v) \end{aligned}$$

Also ist f ein zulässiger b-Fluss in G .

/ 2

Aufgabe 3 – Minimale Schnitte

Wir wenden den Algorithmus EDMONDSKARP für Maximale Flüsse aus der Vorlesung an und führen nach der While-Schleife eine Breitensuche auf dem Residualgraphen G_f mit Startknoten s aus. Die Knoten, die die BFS findet sind die Knoten, die im gesuchten minimalen s - t -Schnitt vorhanden sind.

Das ergibt sich aus dem Min-Cut-Max-Flow-Theorem:

$$\max_{f \text{ zulässiger } s\text{-}t\text{-Fluss}} |f| = \min_{(S,T) \text{ } s\text{-}t\text{-Schnitt}} c(S)$$

Also finden wir einen minimalen Schnitt genau dann, wenn wir einen maximalen Fluss finden.

Die Laufzeit ergibt sich aus der Laufzeit für EDMONDSKARP und der Breitensuche, also $\mathcal{O}(VE^2) + \mathcal{O}(V + E) = \mathcal{O}(VE^2)$.

/ 5
